Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

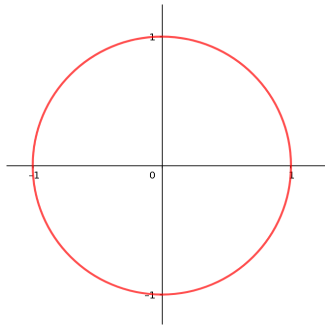
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 11

Wir haben Kurvenintegrale von Skalar- und Vektorfeldern eingeführt. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Physik. Wenn eine geschlossene Kurve nur mit dessen Bild gegeben ist (wie die Einheitskrieslinie in der Präsenzaufgabe), so wird implizit angenommen, dass der Start- und Endpunkt übereinstimmen und dass die Kurve einmal im positiven Sinne durchgelaufen wird. Da das Kurvenintegral eines Gradientenfeldes nur von seinem Potential im Start- und Endpunkt abhängt, ist es über eine geschlossene Kurve gleich 0.



Weiterhin haben wir das Konzept des Riemann-Integrals auf Gebiete von höheren Dimensionen erweitert. Die Idee ist dieselbe wie in Dimension 1: Es gibt das Volumen der Menge unter dem Graphen wieder.

Präsenzaufgaben

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 18. und 19. Juli in den Übungen besprochen.

1. Es sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{F}(x,y) := \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeichnen Sie es in (wenigstens vier) Punkten auf der Einheitskreislinie.

(b) Zeigen Sie, dass es die Integrabilitätsbedingung erfüllt.

(c) Berechnen Sie dessen Kurvenintegral längs der Einheitskreislinie.

(d) Ist $\boldsymbol{F}$ ein Gradientenfeld?

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 23. Juli 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Es befinde sich eine Ladung Q im Ursprung. Deren Kraft auf jede andere Ladung q mit Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ ist durch das Coulumb-Gesetz

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

gegeben. Somit ist ein Vektorfeld $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert.

(a) Ist der Definitionsbereich von $\boldsymbol{F}$ einfach zusammenhängend?

(b) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{F}$ ein Gradientenfeld ist.

(c) Bestimmen Sie sein Potential.

2. Bestimmen Sie, ob die folgenden Vektorfelder Gradientenfelder sind. Falls ja, berechnen Sie noch deren Potential.

(a) $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A}(x,y) := \begin{pmatrix} 7x+3y \\ 5x-4y \end{pmatrix},$

(b) $\boldsymbol{B} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{B}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \end{pmatrix},$

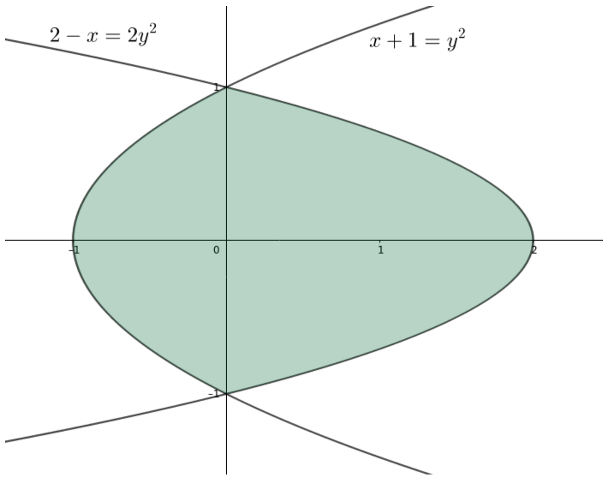
(c) $\boldsymbol{C} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{C}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix},$

3. Bestimmen Sie für die auf dem Bild dargestellten Fläche

(a) den Flächeninhalt,

(b) den Schwerpunkt,

(c) die Flächenträgheitsmomente um beide Achsen.



4. Berechnen Sie

$$\int_A xy^2z^3 \; dx \; dy \; dz,$$

wobei $A \subset \mathbb{R}^3$

(a) der Quader $[-1,2] \times [0,2] \times [-2,1]$,

(b) das Tetraeder mit Ecken $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$

ist.